Probe klausur 07/08

zu Aufgabe 7

Für $x \in \{-1, 1\}$ ist f nicht definiert. Sei $x \notin \{-1, 1\}$. Es ist $\tan(\frac{\pi x}{x^2-1}) = \frac{\sin(\frac{\pi x}{x^2-1})}{\cos(\frac{\pi x}{x^2-1})}$. Dieser Ausdruck ist genau dann nicht definiert, wenn der Nenner 0 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\frac{\pi x}{x^2-1} \in \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist.

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi x}{x^2-1} \in \{(k+\tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x}{x^2-1} = k + \tfrac{1}{2} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x}{x^2-1} = \frac{2k+1}{2} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 1 = \frac{2}{2k+1}x \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - \frac{2}{2k+1}x - 1 = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{1 \pm \sqrt{4k^2+4k+2}}{2k+1} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass f für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, \frac{1\pm\sqrt{4k^2+4k+2}}{2k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert ist.

Die Funktion ist überall dort, wo sie definiert ist, stetig, denn sie ist die Komposition der stetigen Funktionen $x \mapsto \tan(x)$ und $x \mapsto \frac{\pi x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$.

zu Aufgabe 8

Die gegebene Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich zweimal differenzierbar. Ihre Ableitungen sind

$$f'(x) = (nx^{n-1} - x^n)\exp(-x) \text{ und } f''(x) = (n(n-1)x^{n-2} - 2nx^{n-1} + x^n)\exp(-x).$$

Nullstellen hat f' in $x_0 \in \{0, n\}$. In $x_0 = n$ ist

$$f''(n) = (n(n-1)n^{n-2} - 2nn^{n-1} + n^n)\exp(-n) = -n^{n-1}\exp(-n) < 0,$$

sodass hier ein lokales Maximum vorliegt.

zu Aufgabe 7

Sei $x \in I$. Ist $x \in I \cap \mathbb{Q}$, so gilt nach Annahme $f(x) = g(x)$. Wir können also annehmen, dass $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es eine Folge (x_n), deren Glieder alle in $\mathbb{Q}$ liegen, und die den Grenzwert x hat. Es folgt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$, denn f und g sind stetig.

zu Aufgabe 8

Sei $f(x) = \sin(\frac{\cos(x)}{x})$, und sei $g(x) = \sin(\frac{\cos(x)}{x})$. Mit der Kettenregel gilt

$$f'(x) = g'(x) \cdot \frac{1}{2} g(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} g'(x)(\sin(\frac{\cos(x)}{x}))^{-\frac{1}{2}}.$$

Sei $h(x) = \frac{\cos(x)}{x}$. Dann gilt wieder mit der Kettenregel

$$g'(x) = h'(x)\cos(\frac{\cos(x)}{x}).$$

Mit der Quotientenregel gilt

$$h'(x) = \frac{x(-\sin(x)) - \cos(x)}{x^2}.$$

Es folgt

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{x(-\sin(x)) - \cos(x)}{x^2}\cos(\frac{\cos(x)}{x})(\sin(\frac{\cos(x)}{x}))^{-\frac{1}{2}}.$$

Nachklausur 07/08

zu Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto x - \exp(-x)$.

1. Als Differenz differenzierbarer Funktionen ist f differenzierbar, und es gilt $f'(x) = 1 + \exp(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $\exp(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, folgt, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Somit ist f streng monoton wachsend, und somit injektiv.

2. Es gilt $x = e^{-x}$ genau dann, wenn $f(x) = x - \exp(-x) = 0$ ist. Es sind $f(0) = -1$ und $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$. Da f als differenzierbare Funktion stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = 0$ gibt. Für dieses x_0 gilt $x_0 = e^{-x_0}$. Da f injektiv ist, gibt es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$, also genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$, das die Gleichung $x = e^{-x}$ erfüllt.

zu Aufgabe 8

Mögliche Extremwerte liegen vor, sofern $f'(x) = 0$ ist. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) - (-\sin(x)2\cos(x)) = -\sin(x) + \sin(x)2\cos(x) \\ &= \sin(x)(2\cos(x) - 1). \end{aligned}$$

Genau dann ist $f'(x) = 0$, wenn $\sin(x) = 0$ oder $2\cos(x) - 1 = 0$. Die einzigen Nullstellen von sin in $[0, \pi]$ sind 0 und π.

Genau dann ist $2\cos(x) - 1 = 0$, wenn $\cos(x) = \frac{1}{2}$. Es ist $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, und da cos auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist, folgt, dass $\frac{\pi}{3}$ die einzige Nullstelle von $2\cos(x) - 1$ in $[0, \pi]$ ist. Somit gilt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \frac{\pi}{3}, \pi\}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - \cos(x) \\ &= 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - \cos(x). \end{aligned}$$

Einsetzen der Nullstellen von f' liefert

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2(1-0) - 1 = 1 > 0 && \Rightarrow \ 0 \text{ ist lokales Minimum} \\ f''(\tfrac{\pi}{3}) &= 2(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}) - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{2} < 0 && \Rightarrow \ \tfrac{\pi}{3} \text{ ist lokales Maximum} \\ f''(\pi) &= 2(1-0) + 1 = 3 > 0 && \Rightarrow \ \pi \text{ ist lokales Minimum.} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Es gilt

$$f'(x) = -\sin(x) - 2\cos(x)(-\sin(x)) = \sin(x)(2\cos(x) - 1)$$

und

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sin(x)(-2\sin(x)) + (2\cos(x) - 1)\cos(x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - \cos(x) \\ &= 2(\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))) - \cos(x) = 4\cos^2(x) - \cos(x) - 2. \end{aligned}$$

Notwendig für Nullstellen im Inneren ist $f'(x) = 0$. Genau dann ist $f'(x) = 0$, wenn $\sin(x) = 0$ oder $2\cos(x) - 1 = 0$. Im Intervall $[-\pi, \pi]$ ist dies genau dann der Fall, wenn $x = 0, \pi, -\pi$ ist (dann ist $\sin(x) = 0$), oder wenn $x = \pm\frac{\pi}{3}$ ist (dann ist $\cos(x) = \frac{1}{2}$). Es gilt

$$f''(0) = 4 - 1 - 2 = 1 > 0 \text{ und } f''(\pi) = f''(-\pi) = 4 + 1 - 2 = 3 > 0.$$

'

Somit hat f bei $x = 0, \pi, -\pi$ ein lokales Minimum. Damit sind auch die Stellen am Rand des Definitionsbereichs untersucht. Ferner gilt

$$f''(\frac{\pi}{3}) = f''(-\frac{\pi}{3}) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0.$$

Somit liegt bei $x = \pm\frac{\pi}{3}$ ein lokales Maximum vor.

Aufgabe 6

Sei $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 2^x - x - 3$ für alle $x \in [0, 3]$. Es gilt $f(0) = -2 < 0$ und $f(3) = 2^3 - 3 - 3 = 2 > 0$. Da f stetig ist, gibt es mit dem Nullstellensatz von Bolzano ein $x_0 \in [0, 3]$ mit $f(x_0) = 0$.

Aufgabe 8

Wir berechnen das Integral mit partieller Integration. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \underbrace{x^2}_{=g'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\, dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{3}\frac{1}{x}x^3 dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{3} dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3\right)\Big|_a^b
\end{aligned}
$$

SS 09

Aufgabe 5

Die Funktion f ist auf dem Intervall $[1,e]$ stetig. Es gilt $f(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 > 0$ und $f(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano gibt es ein $x_0 \in (1,e)$, sodass $f(x_0) = 0$ ist. Somit gibt es mindestens eine Nullstelle von f in $[1,e]$. Die Funktion f ist auch differenzierbar, und es gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ für alle $x \in [1,e]$. Somit ist f im Intervall $[1,e]$ streng monoton fallend und stetig. Es folgt, dass f höchstens eine Nullstelle in $[1,e]$ besitzt. Zusammen folgt, dass f genau eine Nullstelle in $[1,e]$ besitzt.

Aufgabe 6

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar; daher genügt es, diejenigen Stellen x mit $f'(x) = 0$ zu betrachten. Es gilt

$$f'(x) = (4x-1)\exp(-x) - (2x^2 - x - 1)\exp(-x) = (-2x^2 + 5x)\exp(-x).$$

Da $\exp(-x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, folgt, dass $f'(x) = 0$ genau dann gilt, wenn $-2x^2+5x = (-2x+5)x = 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x = 0$ oder $x = \frac{5}{2}$ ist.

Die Funktion f' ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f''(x) = (-4x+5)\exp(-x) - (-2x^2 + 5x)\exp(-x) = (2x^2 - 9x + 5)\exp(-x).$$

Es ist $f''(0) = 5\exp(-x) > 0$ und $f''(\frac{5}{2}) = -5\exp(-x) < 0$. Somit hat f bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bei $x = \frac{5}{2}$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 4

Es gilt $f(0) = |-1| > 0$ und $f(4) = 3 + 12 - 16 = -1 < 0$.

Als Summe und Verknüpfung stetiger Funktionen ist f stetig. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass f in $[0, 4]$ eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 5

Seien $f(x) = \exp(x) - 1 - x$ und $g(x) = \sin^2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Die Funktionen f und g sind auf einer Umgebung U von 0 definiert und stetig; somit gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2(x) = 0$. Die Funktionen f und g sind differenzierbar mit $f'(x) = \exp(x) - 1$ und $g'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Weiter sind f' und g' auf U definiert und stetig, und es gilt $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$. Ferner sind f' und g' differenzierbar mit $f''(x) = \exp(x)$ und $g''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$. Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0} 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2$ (aufgrund der Stetigkeit von f'' und g''). Damit existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. Mit der Regel von de

l'Hospital folgt

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x}{\sin^2(x)}.$$

SS 10

Aufgabe 5

Es gilt $f(0) = \cos(0) - \exp(0) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 > 0$ und $f(\frac{1}{100}) = \cos(2) - \exp(\frac{1}{100}) + 1 < 0$, denn $\cos(2) < 0$ und $\exp(\frac{1}{100}) > \exp(0) = 1$, da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist.

Als Summe stetiger Funktionen ist f stetig. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass f in $[0, \frac{1}{100}]$ eine Nullstelle besitzt.

Die Funktion f ist als Summe differenzierbarer Funktionen auch differenzierbar, und es gilt $f'(x) = -200\sin(200x) - \exp(x) < 0$ für $x \in [0, \frac{1}{100}]$, denn $\sin(y) \geq 0$ für $y \in [0, 2] \subseteq [0, \pi]$ und $\exp(x) > 0$. Also ist f streng monoton fallend auf $[0, \frac{1}{100}]$. Es folgt, dass f genau eine Nullstelle in $[0, \frac{1}{100}]$ besitzt.

Aufgabe 6

Es ist $f(x) = \cos(\frac{x}{2})\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, also

$$f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

denn $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Es ist $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})\sin(x) + \cos(\frac{x}{2})\cos(x)$, also

$$f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

denn $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Weiter ist $f''(x) = -\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})\sin(x) - \sin(\frac{x}{2})\cos(x) - \cos(\frac{x}{2})\sin(x) = -\frac{5}{4}\cos(\frac{x}{2})\sin(x) - \sin(\frac{x}{2})\cos(x)$, also

$$f''(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{4\sqrt{2}}.$$

Es folgt

$$P_{2,\frac{\pi}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{2}) - \frac{5}{8\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{2})^2.$$

WS 10/11

Aufgabe 5

Es sind $\lim\limits_{x\to 3}(x^3 - 27) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 3}(x - 3) = 0$, denn die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 27$ und $g(x) = x - 3$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und als Polynomfunktionen differenzierbar mit stetiger Ableitung. Es sind $\lim\limits_{x\to 3} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3} 3x^2 = 27$ und $\lim\limits_{x\to 3} g'(x) = \lim\limits_{x\to 3} 1 = 1$. Somit existiert $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ und ist 27. Es folgt $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = 27$ mit der Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 6

Für alle $x \in (0,1)$ ist $x(1-x) > 0$, also $\sqrt{x(1-x)} > 0$. Ferner sind $f(0) = 0 = f(1)$. Somit liegen für $x = 0$ und $x = 1$ Minima vor. Wir untersuchen die Funktion jetzt auf dem offenen Intervall $(0,1)$ auf Extrema. Die Funktion f ist differenzierbar und wir bilden mit der Kettenregel die erste Ableitung von f. Es ist

$$f'(x) = (1-2x)\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Ein Extremum kann nur dann in $x_0 \in (0,1)$ vorliegen, wenn $f'(x_0) = 0$ ist. Wir untersuchen also die Funktion auf Nullstellen in $(0,1)$. Es ist

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x_0}{2\sqrt{x_0 - x_0^2}} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Im Prinzip sind wir jetzt schon fertig. Die Funktion f ist auf $[0,1]$ stetig, es gilt $f(x) = 0$ für $x = 0$ beziehungsweise $x = 1$, und es ist $f(x) > 0$ für alle $x \in (0,1)$. Dann kann f nicht monoton wachsend sein, muss also ein Maximum auf $(0,1)$ besitzen. Dies kann nur für $x = \frac{1}{2}$ vorliegen, denn $x = \frac{1}{2}$ ist die einzige Nullstelle von f'.

Wir können aber auch die zweite Ableitung betrachten. Wir stellen fest, dass f' differenzierbar ist und berechnen f'' mit der Quotientenregel:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - (1-2x)\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}}{x - x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{x-x^2} - \frac{(1-2x)^2}{2\sqrt{x-x^2}}}{x-x^2}.$$

In die zweite Ableitung setzen wir jetzt $x_0 = \frac{1}{2}$ ein und erhalten

$$f''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} < 0.$$

Es folgt, dass in $x_0 = \frac{1}{2}$ ein Maximum von f vorliegt.

Aufgabe 6

1. Es ist $\sqrt[3]{(\sin(2x))^2} = (\sin(2x)^2)^{\frac{1}{3}} = \sin(2x)^{\frac{2}{3}}$ also $f(x) = \sin(2x)^{\frac{2}{3}}$. Diese Funktion leiten wir mit der Kettenregel ab:
$$f'(x) = (\sin(2x))' \cdot \frac{2}{3} \cdot \sin(2x)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}\frac{(\sin(2x))'}{\sqrt[3]{\sin(2x)}}.$$
Die Ableitung $(\sin(2x))'$ wird wieder mit der Kettenregel berechnet. Es ist $(\sin(2x))' = 2 \cdot \cos(2x)$, also
$$f'(x) = \frac{4}{3}\frac{\cos(2x)}{\sqrt[3]{\sin(2x)}}.$$

2. Wir verwenden zur Berechnung partielle Integration, also die Formel $\int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = f(x)g(x) \mid_a^b - \int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$. Dafür sei $f'(x) = \cos(x)$ und $g(x) = x^2$, also $f(x) = \sin(x)$ und $g'(x) = 2x$. Es folgt
$$\int\limits_a^b x^2 \cdot \cos(x)dx = \sin(x) \cdot x^2 \mid_a^b - \int\limits_a^b 2x \cdot \sin(x)dx = \sin(x) \cdot x^2 \mid_a^b -2\int\limits_a^b x \cdot \sin(x)dx.$$
Zur Berechnung von $\int\limits_a^b x \cdot \sin(x)dx$ verwenden wir wieder partielle Integration, und zwar jetzt mit $f'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$, also $f(x) = -\cos(x)$ und $g'(x) = 1$. Es folgt
$$\int\limits_a^b x \cdot \sin(x)dx = (-\cos(x)) \cdot x \mid_a^b - \int\limits_a^b (-\cos(x))dx = -x \cdot \cos(x) \mid_a^b + \int\limits_a^b \cos(x)dx.$$
Jetzt verwenden wir, dass sin eine Stammfunktion von cos ist, und es folgt
$$\int\limits_a^b x^2 \cos(x)dx = (x^2 \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2\sin(x)) \mid_a^b .$$

Aufgabe 8

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Die Funktion $f : (0, \infty \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax - \sqrt{x}$ ist differenzierbar, und es ist
$$f'(x) = a - \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ für } x > 0.$$
Es folgt $f'(x) = 0$, falls $x = \frac{1}{4a^2}$, und $f'(x) < 0$, falls $0 < x < \frac{1}{4a^2}$, und $f'(x) > 0$, falls $x > \frac{1}{4a^2}$ ist. Somit ist f auf $(0, \frac{1}{4a^2})$ streng monoton fallend, und auf $(\frac{1}{4a^2}, \infty)$ streng monoton wachsend. Die einzige Nullstelle von f' ist $x_0 = \frac{1}{4a^2}$. Da f in $(0, \frac{1}{4a^2})$ streng monoton fällt und in $(\frac{1}{4a^2}, \infty)$ streng monoton wächst, liegt hier ein Minimum vor.

SS 12

Aufgabe 8

Es ist $\exp(x)(y-x) < \exp(y) - \exp(x) < \exp(y)(y-x)$ genau dann, wenn $\exp(x) < \frac{\exp(y)-\exp(x)}{y-x} < \exp(y)$ gilt.

Da die Exponentialfunktion überall stetig und überall differenzierbar ist, können wir den Mittelwertsatz auf die Exponentialfunktion im Intervall $[x, y]$ anwenden. Dies zeigt, dass es ein $x_0 \in (x, y)$ so gibt, dass $\frac{\exp(y)-\exp(x)}{y-x} = \exp'(x_0) = \exp(x_0)$ ist. Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, folgt $\exp(x) < \exp(x_0) < \exp(y)$, also $\exp(x) < \frac{\exp(y)-\exp(x)}{y-x} < \exp(y)$.

Aufgabe 9

Wir untersuchen die Funktionen zunächst auf Stetigkeit in 0.

Sei (x_n) eine beliebige Nullfolge. Dann ist (x_n^k) für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge. Sei $b_n = \sin(\frac{1}{x_n})$, falls $x_n \neq 0$ ist, und $b_n = 0$, falls $x_n = 0$ ist. Dann ist (b_n) beschränkt, und damit ist $(x_n^k b_n)$ eine Nullfolge. Es ist aber $x_n^k b_n = f(x_n)$, und es folgt, dass der Grenzwert von $(f(x_n))$ existiert, gleich 0 und damit gleich $f(0)$ ist. Somit ist f für alle $k \in \mathbb{N}$ stetig in $x = 0$.

Wir untersuchen die Funktionen jetzt auf Differenzierbarkeit in 0.

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R} \setminus 0$, die gegen 0 konvergiert. Es ist

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{x_n^k \sin(\frac{1}{x_n})}{x_n} = x_n^{k-1} \sin(\frac{1}{x_n}).$$

Wie im ersten Teil der Aufgabe ist $(x_n^{k-1} \sin(\frac{1}{x_n}))$ für $k > 1$ konvergent, und es folgt die Differenzierbarkeit der Funktionen in 0 für $k > 1$. Ist $k = 1$, so ist die Funktion in 0 nicht differenzierbar. Sei etwa $x_n = \frac{2}{n\pi}$. Dann ist (x_n) eine Nullfolge, aber die Folge $(\sin(\frac{1}{x_n}))$ ist nicht konvergent, da sie unendlich oft die Werte -1, 0 und 1 annimmt. Somit existiert der Grenzwert der Folge $(\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0})$ für $k = 1$ nicht.

SS 13

Aufgabe 5

(a) Es gilt

$$\frac{n^3(n+1)^2}{3n^5-2\pi} = \frac{n^3(n^2+2n+1)}{3n^5-2\pi} = \frac{n^5+2n^4+n^3}{3n^5-2\pi} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2\pi}{n^5}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n^5} = 0$ gilt, folgt

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}) = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 1+0+0 = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(3-\frac{2\pi}{n^5}) = 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^5} = 3-0 = 3,$$

also insgesamt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+1)^2}{3n^5-2\pi} = \frac{1}{3}.$$

(b) Wir verwenden die Substitutionsregel mit $f(u) = \frac{1}{u}$ und $g(x) = x^4+1$. Dann ist $g'(x) = 4x^3$, also

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{4x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int_2^{17}\frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\ln(u)\Big|_2^{17} = \frac{1}{4}\ln(17) - \frac{1}{4}\ln(2) = \frac{1}{4}\ln(\frac{17}{2}).$$

Aufgabe 6

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig und differenzierbar auf $[0,1]$. Es gilt $f(0) = e^{-1} - 1 < 0$ und $f(1) = 1-1+1 = 1 > 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano hat f also mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$. Weiter gilt

$$f'(x) = e^{x-1} + 2x \text{ für } x \in [0,1]$$

und damit $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Die Funktion f ist damit auf dem ganzen Intervall streng monoton steigend und kann daher nur höchstens eine Nullstelle haben. Insgesamt ist damit gezeigt, dass f genau eine Nullstelle auf $[0,1]$ besitzt. Diese Nullstelle ist genau das $x \in [0,1]$, für das $1 - x^2 = e^{x-1}$ gilt.

WS 13/14

Aufgabe 4

f ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x}e^{-x} - \ln(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{x} - \ln(x)\right)e^{-x}$. Der Faktor e^{-x} ist immer positiv, das Vorzeichen von f' wird also von $h(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$ bestimmt. Das ist eine stetige Funktion mit (z.B.) $h(1) = 1 - 0 = 1 > 0$, $h(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ (wegen $e > 1$). Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat h und damit auch f' also mindestens eine Nullstelle x_0 in $(0,\infty)$. (Genauer gilt x_0 in $(1,e)$, aber das interessiert uns jetzt nicht.) Es hat dort aber auch höchstens eine Nullstelle, denn in $(0,\infty)$ sind $\frac{1}{x}$ und $-\ln(x)$ streng monoton fallend (denn $\ln(x)$ ist streng monoton wachsend), insgesamt ist also h streng monoton fallend. (Das folgt auch aus $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ für $x > 0$.) Damit ist $h(x) > 0$ für $x < x_0$ und $h(x) < 0$ für $x > x_0$, und dasselbe gilt dann auch für f'. Also hat f in x_0 ein Maximum, und es kann keine weiteren Extrema geben.

Aufgabe 7

Wir setzen $f(x) = \ln(x)$, $g'(x) = x^2$, also $f'(x) = \frac{1}{x}$ und (z.B.) $g(x) = \frac{x^3}{3}$. Dann erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x)\cdot x^2\,dx &= \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\frac{x^3}{3}\,dx = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(1) - \int_1^2 \frac{x^2}{3}\,dx \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{x^3}{9}\bigg|_1^2 = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}\,.\end{aligned}$$

SS 14

Aufgabe 7

Nach Voraussetzung gilt $0 < g'(x) - f'(x) = (g-f)'(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Damit ist $g - f$ auf $[a,b]$ streng monoton wachsend. Es folgt $g(x) - f(x) > g(a) - f(a) = 0$ für alle $x \in (a,b]$, also $g(x) > f(x)$ für alle $x \in (a,b]$.

Aufgabe 6

f mit $f(x) = x^{-1}\ln(x)$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = -x^{-2}\ln(x) + x^{-1}\cdot x^{-1} = x^{-2}(1-\ln(x))$. Der Faktor x^{-2} ist immer positiv, das Vorzeichen von f' wird also von $h(x) = 1 - \ln(x)$ bestimmt. Das ist eine stetige Funktion mit $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$, und weil ln monoton steigend ist, ist h monoton fallend; also gilt $h(x) > 0$ für $x < x_0$ und $h(x) < 0$ für $x > x_0$, und dasselbe gilt dann auch für f'. f hat somit in $x_0 = e$ ein lokales Maximum, und da f' keine weiteren Nullstellen hat, kann es keine weiteren Extrema geben.

Aufgabe 7

Wir setzen $f(x) = \ln(x)$, $g'(x) = x^{-2}$, also $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ und (z.B.) $g(x) = -x^{-1}$. Dann erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^{-2}\ln(x)\,dx &= -x^{-1}\ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 (-x^{-1})x^{-1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(2) - (-1)\ln(1) + \int_1^2 x^{-2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln(2) + (-x^{-1})\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(1-\ln(2))\ .\end{aligned}$$

SS 15

Aufgabe 4

Es ist $f'(x) = 1 - 2\sin(x)$. Aus der Bedingung $f'(x) = 0$, also $\sin(x) = \frac{1}{2}$, folgt, dass mögliche Minima und Maxima für $x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ beziehungsweise $y_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vorliegen. Die Funktion f' ist differenzierbar, und es gilt $f''(x) = -2\cos x$. Es ist $f''(x_k) = -2\cos(\frac{\pi}{6}) < 0$ und $f''(y_k) = -2\cos(\frac{5\pi}{6}) > 0$. Damit liegt bei x_k, $k \in \mathbb{Z}$, ein lokales Maximum vor, und bei y_k, $k \in \mathbb{Z}$, ein lokales Minimum.

Aufgabe 5

Als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall nimmt f irgendwo (möglicherweise mehrfach) in $[a,b]$ ihr Maximum an.

1. Bedingung (ii) ist äquivalent mit: Für jedes $y \in (a,b]$ gilt $f(y) \leq f(a)$. Für $y = a$ gilt ebenfalls $f(a) \leq f(a)$, also gilt für alle $y \in [a,b]$, dass $f(y) \leq f(a)$, d.h. a ist eine Maximalstelle von f.

2. Sei $c \in (a,b)$; nach Bedingung (i) gibt es dann ein $y \in (c,b]$ mit $f(y) > f(c)$, also ist c keine Maximalstelle von f.

3. Wir wissen bereits, dass a eine Maximalstelle von f ist, und müssen nun noch zeigen, dass $f(b) = f(a)$ gilt. Wir nehmen an, das sei nicht der Fall, dass also $f(a) > f(b)$; dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $c \in (a,b)$ mit $f(a) > f(c) > f(b)$. Wir betrachten die Menge $A = \{x \in (a,b) | f(x) = f(c)\}$; sei $x_1 = \sup A$. Wegen der Stetigkeit von f gilt dann auch $f(x_1) = f(c)$ (dazu können wir eine beliebige Folge betrachten, die in A gegen x_1 konvergiert). Daraus folgt, dass $a < x_1 < b$ ist ($x_1 = b$ kann wegen $f(x_1) = f(c) > f(b)$ nicht eintreten). Nach Bedingung (i) gibt es dann ein $y \in (x_1, b]$ mit $f(y) > f(x_1) > f(b)$, und erneut nach dem Zwischenwertsatz muss in (y,b) (also rechts von x_1!) ein weiteres x_2 mit $f(x_2) = f(x_1)$ liegen – im Widerspruch dazu, dass $x_1 = \sup A$ war. Also war unsere Annahme falsch, d.h. es gilt $f(b) = f(a)$. (Direkt mit a an Stelle von c zu argumentieren, funktioniert nicht – es könnte $A = \{a\}$ sein, und Bedingung (i) wäre nicht anwendbar!)

WS 15/16

Aufgabe 5

f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$. Das ist eine stetige Funktion mit $f'(0) = 1 - 0 = 1 > 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) = 0 - \frac{\pi}{2} \cdot 1 < 0$. Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat damit f' also mindestens eine Nullstelle x_0 in $(0, \frac{\pi}{2})$. Es hat dort aber auch höchstens eine Nullstelle, denn in $(0, \frac{\pi}{2})$ gilt $f''(x) = -\sin(x) - \sin(x) - x\cos(x) < 0$ (weil $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ positiv sind), also ist f' in $(0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton fallend. Somit hat f' in $(0, \frac{\pi}{2})$ genau eine Nullstelle x_0, und wegen $f''(x_0) < 0$ liegt hier ein Maximum von f vor.

Aufgabe 7

a) Wir setzen $f(x) = x$, $g'(x) = \cos(x)$, also $f'(x) = 1$ und (z.B.) $g(x) = \sin(x)$. Dann erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x \cdot \cos(x)\,dx &= x \cdot \sin(x)|_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \sin(x)\,dx = x \cdot \sin(x)|_0^\pi - (-\cos(x))|_0^\pi \\
&= x \cdot \sin(x)|_0^\pi + \cos(x)|_0^\pi = \pi \cdot \sin(\pi) - 0 \cdot \sin(0) + \cos(\pi) - \cos(0) \\
&= 0 - 0 + (-1) - 1 = -2\,.
\end{aligned}$$

b) Wir substituieren $x - 1 = g(x)$, also $g'(x) = 1, g(2) = 1, g(3) = 2$, und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x+1}{x-1}\,dx &= \int_2^3 \frac{g(x)+2}{g(x)} g'(x)\,dx = \int_1^2 \frac{u+2}{u}\,du = \int_1^2 1 + \frac{2}{u}\,du = u + 2\ln(u)|_1^2 \\
&= 2 + 2\ln(2) - (1 + 2\ln(1)) = 2 + 2\ln(2) - (1+0) = 1 + 2\ln(2)\,.
\end{aligned}$$

SS 16

Aufgabe 6

Sei $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ für alle $x \in D$.

(a) Mit der Kettenregel gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$$

für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Weiter ist mit der Ketten- und Quotientenregel

$$f''(x) = -\frac{\sqrt{2-x^2} - x\left(\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}\right)}{(\sqrt{2-x^2})^2} = -\frac{\sqrt{2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{(\sqrt{2-x^2})^2} = -\frac{\frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{(\sqrt{2-x^2})^2} = -\frac{2}{(\sqrt{2-x^2})^3}$$

für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(b) Hat f ein lokalen Extremum bei $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, dann gilt $f'(x) = 0$, also $-\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 0$. Das ist nur für $x = 0$ erfüllt. Da $f''(0) = -\frac{2}{\sqrt{2}^3} < 0$ gilt, liegt bei $x = 0$ ein lokales Maximum vor. Nun müssen noch die Randwerte $x = -\sqrt{2}$ und $x = \sqrt{2}$ betrachtet werden. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$. Also liegt bei beiden Punkten ein lokales Minimum vor.

(c) Für das zweite Taylorpolynom von f in $x_0 = 1$ gilt

$$P_{2,1}(x) = \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 1 - (x-1) - (x-1)^2.$$

WS 16/17

Aufgabe 4

Für $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$, $x \in I = [0, \infty)$ gilt $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$; damit liegt in $x_0 = 0$ ein globales (und damit gleichzeitig lokales) Minimum vor. Nun suchen wir nach möglichen weiteren Extrema im offenen Intervall $(0, \infty)$; dort müsste die Ableitung der (rationalen und damit auf dem ganzen Definitionsbereich differenzierbaren) Funktion f eine Nullstelle haben. Wegen

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

ist das für $x > 0$ nur bei $x_1 = \sqrt[3]{2}$ der Fall. Weiter lässt sich $f'(x) > 0$ für $0 < x < \sqrt[3]{2}$ und $f'(x) < 0$ für $x > \sqrt[3]{2}$ ablesen, also ist f streng monoton steigend auf $[0, x_1)$ und streng monoton fallend auf (x_1, ∞), also ist in $x_1 = \sqrt[3]{2}$ das einzige lokale (und globale) Maximum.

Aufgabe 5

Wenn f und g auf I differenzierbar sind, gilt das auch für h mit $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Gleichzeitig ist $h(a) = h(b) = 0$ (wegen $f(a) = 0$ bzw. $g(b) = 0$). Also existiert nach dem Satz von Rolle ein $x_0 \in (a, b)$ mit $h'(x_0) = 0$, d.h. $f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) = 0$. Da wegen der strengen Monotonie a die einzige Nullstelle von f und b die einzige Nullstelle von g ist, können wir durch $f(x_0)$ und $g(x_0)$ dividieren und erhalten wie behauptet $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$.

Aufgabe 7

Der Zähler des Integranden ist (fast) die Ableitung des Nenners, daher substituieren wir $x^3 + 1 = g(x)$, also $g'(x) = 3x^2, g(0) = 1, g(2) = 9$, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{1}{g(x)}\,g'(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_1^9 \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln(u)\Big|_1^9 \\ &= \frac{1}{3}(\ln(9) - \ln(1)) = \frac{\ln(9)}{3}\,.\end{aligned}$$

SS 17

Aufgabe 5

(a) Die Menge A der ungeraden natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt, besitzt also auch kein Maximum. Sie ist nach unten beschränkt (zum Beispiel durch 1), und 1 ist auch ihr Minimum.

(b) Es gilt

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -1 \text{ oder } x > 1\}.$$

Die Menge ist also weder nach oben noch nach unten beschränkt, und sie besitzt weder Minimum noch Maximum.

(c) Es ist

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| - 1 < 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}.$$

Die Menge ist also zum Beispiel durch 0 nach unten und durch 2 nach oben beschränkt, besitzt aber weder Minimum noch Maximum.

(d) Mit der ersten binomischen Formel erhalten wir

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0\}.$$

Die Menge ist also zum Beispiel durch -2 nach unten und durch 0 nach oben beschränkt. Außerdem ist -2 das Minimum und 0 das Maximum von D.

SS 18

Aufgabe 5

In allen Punkten $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ ist f_a Quotient stetiger Funktionen, wobei der Nenner nicht 0 ist. Also ist f_a dort stetig, und wir müssen nur noch den Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ untersuchen. Die Funktion f_a ist stetig in $x = \frac{\pi}{2}$, wenn $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f_a(x) = f(\frac{\pi}{2}) = a$ gilt. Es ist

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f_a(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}.$$

Es gilt (weil sin und cos stetig sind) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(2x) = \sin(\pi) = 0$ und $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Wir können also versuchen, die Regel von de l'Hospital anzuwenden. Zähler und Nenner sind differenzierbar, und wir betrachten

$$\frac{(\sin(2x))'}{(\cos(x))'} = \frac{2\cos(2x)}{-\sin(x)} = -\frac{2\cos(2x)}{\sin(x)}.$$

Nun gilt

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} -\frac{2\cos(2x)}{\sin(x)} = -\frac{-2}{1} = 2,$$

also mit der Regel von de l'Hospital auch

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} = 2.$$

Für $a = 2$ ist also f_a stetig, für alle $a \neq 2$ ist f_a nicht stetig.

Aufgabe 6

Die Funktion f ist als Differenz zweier stetiger und differenzierbarer Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Weiter gilt $f(0) = -1 < 0$ und $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$. Da $\frac{\pi}{2} > 1$ gilt, ist $\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} < \frac{1}{e}$ und damit $1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 1 - \frac{1}{e} > 0$. Es ist also $f(\frac{\pi}{2}) > 0$. Aus dem Nullstellensatz folgt nun, dass f im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Nullstelle besitzt. Weiter gilt

$$f'(x) = \cos(x) + e^{-x},$$

wobei $\cos(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ und $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Das heißt, $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv in diesem Intervall. Damit ist gezeigt, dass es nur eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ geben kann.

Aufgabe 5

Wir betrachten die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = e^{-x}\,,\ g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Sie sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar (g ist eine rationale Funktion, deren Nenner keine Nullstelle hat). f ist als Spiegelung der e-Funktion an der y-Achse streng monoton fallend ($f'(x) = -e^{-x} < 0$). Wir untersuchen die (ebenfalls stetige und differenzierbare) Differenzfunktion $h = f - g$ auf Nullstellen. Für $x < 0$ gilt $f(x) > f(0) = e^0 = 1\,,\ g(x) = \frac{x^2}{x^2+1} < 1$, also jedenfalls $h(x) > 0$. In $x = 0$ gilt $h(0) = e^0 - \frac{0}{1} = e^0 = 1 > 0$ (auch hier liegt also keine Nullstelle vor), in (z.B.) $x = 1$ gilt dagegen $h(1) = e^{-1} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} = \frac{2-e}{2e} < 0$ (wegen $e > 2$). Also hat h nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0, 1)$. In ganz $(0, \infty)$ kann es aber höchstens eine geben, denn wegen

$$h'(x) = -e^{-x} - \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -e^{-x} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \text{für} \quad x > 0$$

ist h streng monoton fallend auf ganz $(0, \infty)$. Also gibt es genau ein x (und zwar in $(0, 1)$) mit $f(x) = g(x)$.

Aufgabe 7

Wir setzen $f(x) = \ln(x)\,,\ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$, also $f'(x) = \frac{1}{x}\,,\ g(x) = 2x^{1/2} = 2\sqrt{x}$, und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx &= f(x)g(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 f'(x)g(x)\,dx \;=\; \ln(x)\cdot 2\sqrt{x}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx \\
&= 2\sqrt{2}\ln(2) - 0 - \int_1^2 2x^{-1/2}\,dx \;=\; 2\sqrt{2}\ln(2) - 2\cdot 2x^{1/2}\Big|_1^2 \\
&= 2\sqrt{2}\ln(2) - 4(\sqrt{2}-1) \;=\; \sqrt{2}(2\ln(2) - 4) + 4\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Als Produkt und Verkettung stetiger Funktionen ist f für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Es muss also nur noch der Punkt 0 betrachtet werden. Da $|\sin(\frac{1}{x})|$ beschränkt ist und $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$ gilt, folgt auch $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(x^3 |\sin(\frac{1}{x})|) = 0 = f(0)$. Somit ist f stetig im Punkt 0 und damit auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6

Angenommen, f ist nicht injektiv. Dann existieren $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ und $f(x) = f(y)$. Mit dem Mittelwertsatz (oder dem Satz von Rolle) angewendet auf das Intervall $[x, y]$ gibt es ein $z \in (x, y)$ mit

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $f'(x_0) \neq 0$ für alle $x_0 \in (a, b)$ also insbesondere auch für alle $x_0 \in (x, y)$ gilt. Also ist f injektiv.

(f' kann durchaus unstetig sein, siehe z.B. die Klausur vom WS 17/18 – man kann also nicht sofort folgern, dass f' entweder strikt positiv oder strikt negativ sein und deshalb f streng monoton und daher injektiv sein muss. Erst **nachdem** wir die Injektivität gezeigt haben, folgt mit 15.2.12 auch die Monotonie und damit das eindeutige Vorzeichen von f'.)